تطبيقات معادلة برنولي:

تعتبر معادلة برنولي من أهم القوانين الأساسية الهيدروديناميكية التي يمكن بمساعدتها حل العديد من مسائل الجريان. وفيمايلي بعض تطبيقاتها:

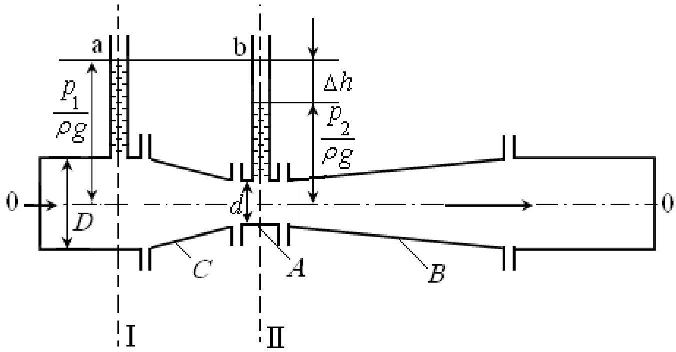
3.12.1- مقياس ڤينتوري (*Venturi Meter*) لتحديد التدفق:

إن أسهل وأدق طريقة لقياس تدفق السائل هي الطريقة الحجمية، وعند القياس بهذه الطريقة يتم وصل السائل إلى وعاء معروف حجمه (V) وبقسمة حجم السائل المتجمع على الفترة الزمنية اللازمة (t) نحدد مقدار غزارة السائل في الأنبوب، أي أن:

$$Q = \frac{V}{t};\ m^3/s$$

ويستحيل بهذه الطريقة قياس الغزارات الكبيرة وكذلك الغزارة في مقاطع اختيارية من الأنابيب أو القنوات الطويلة من غير الإخلال بشكل وتركيب هذه الأنابيب والقنوات، وفي مثل هذه الحالات تستخدم لقياس غزارة السائل أجهزة قياس خاصة ذات تصاميم وأغراض مختلفة.

ندرس فيمايلي مقياس ڤينتوري لقياس كمية السائل، وهو جهاز بسيط في تركيبه ويعمل حسب مبدأ معادلة برنولي. الشكل (3.25).



الشكل (3.25)، الشكل العام والتخطيطي لمقياس ڤينتوري لقياس كمية السائل.

يتكون المقياس من جزأين مخروطيين من أنبوبة هما (C) و(B) تتصل نهايتاهما الضيقتان بجزء إسطواني (A)، وقطر النهايتين الواسعتين للمقطعين المخروطيين يساوي قطر الأنبوبة المراد قياس الغزارة بداخلها.

يتصل الجزآن الإسطوانيان بأنبوبتين لقياس الضغط (a) و(b) وفي المقطع الضيق للمقياس تزداد سرعة حركة السائل وتبعاً لذلك يزداد الدفع الناتج عن السرعة، ونتيجة لذلك ينخفض الضغط، وبما أن محور الجهاز أفقي نأخذه كمستوي مقارنة فيكون $(Z_1 = Z_2 = 0)$ وبالتالي فإن معادلة برنولي في المقطعين (I) و(II) وذلك بدون حساب الفقد (h_f) وعند $(\alpha = 1)$ تكتب على الشكل التالي:

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho \cdot g} = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho \cdot g}$$

فإذا رمزنا إلى الفرق في ارتفاع السائل في الأنبوبتين البيزومتريتين $\left(\frac{p_1 - p_2}{\rho \cdot g}\right)$ بالرمز (Δh) لحصلنا على المعادلة:

$$\Delta h = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} \Rightarrow v_2^2 - v_1^2 = 2g \cdot \Delta h \qquad (3.69)$$

ومن معادلة الاستمرارية $(\omega_1 \cdot v_1 = \omega_2 \cdot v_2)$ يكون:

$$v_1 = v_2 \frac{\omega_2}{\omega_1} \qquad (3.70)$$

وبالتعويض عن قيمة (v_1) من المعادلة (3.70) في (3.69)، ينتج:

$$v_2^2\left[1-\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2\right]=2g\cdot\Delta h \qquad (3.71)$$

ومنه ينتج:

$$v_2=\sqrt{\frac{2g\cdot\Delta h}{1-\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2}} \qquad (3.72)$$

وبالتعبير عن مساحتي المقطع بوساطة قطري الأنبوبتين:

$$\omega_1=\frac{\pi D^2}{4}\ ;\ \omega_2=\frac{\pi d^2}{4}$$

عندئذ يمكن تحديد غزارة السائل في الأنبوبة:

$$Q=\omega_2\cdot v_2=\frac{\pi d^2}{4}\sqrt{\frac{2g\cdot\Delta h}{1-\left(\frac{d}{D}\right)^4}} \qquad (3.73)$$

عند تطبيق معادلة برنولي كنا قد أهملنا الفقد في الدفع بين المقطعين المدروسين (I) و(II) لذلك يجب إدخال تصحيح في المعادلة (3.73) يأخذ بعين الاعتبار انخفاض التصريف (الغزارة) المرتبط بالفقد في الدفع.

يؤخذ معامل التصريف (μ) كتصحيح للغزارة وهو دائماً أصغر من الواحد، ويحدد التصريف الحقيقي (الغزارة الحقيقة) بالمعادلة التالية:

$$Q=\mu\frac{\pi d^2}{4}\sqrt{\frac{2g\cdot\Delta h}{1-\left(\frac{d}{D}\right)^4}} \qquad (3.74)$$

حيث إنَّ:

μ : معامل التصريف ويساوي عادة ($0.95\div0.98$).

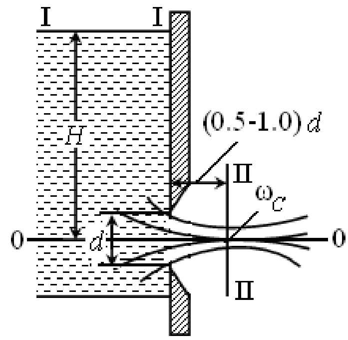
d : قطر الوصلة الإسطوانية في المقياس.

D : قطر الأنبوب المراد قياس تدفق السائل فيه.

3.12.2- تفريغ خزان من فتحة جانبية صغيرة تحت تأثير الثقالة:

غالباً مايقابل في الصناعة جريان السائل من فتحات مختلفة، ويمكن أن يحدث الجريان من فتحة صغيره قطرها (d) غير كبير بالمقارنة مع دفع السائل (H)، ($d \leq 0.1H$). بالنسبة لمثل هذه الفتحات يتساوى عملياً الضغط في أية نقطة من نقاطها. أما الفتحات الواسعة فهي تلك الفتحات التي يكون فيها ($d > 0.1H$).

لندرس حالة جريان مائع في الهواء الخارجي تحت تأثير الثقالة من فتحة صغيرة دائرية الشكل قطرها (d) في جدار خزان مفتوح من الأعلى –الشكل (3.26)– ويحافظ على ثبات مستوى ارتفاع السائل في الخزان ($H = const$) وذلك بالتعويض باستمرار عن النقص في كمية السائل بواسطة أنبوب خارجي.



الشكل (2.26)، تدفق سائل من فتحة جانبية.

إن أهم خصائص الجريان في مثل هذه الفتحات هو وجود مقطع مضغوط يقع على مسافة d $(0.5 \div 1.0)$ من الجدار.

تسمى النسبة بين المقطع المضغوط (ω_C) والمساحة الكلية للفتحة (ω) بمعامل انضغاط التيار ($\varepsilon = \frac{\omega_C}{\omega}$) وبالنسبة للفتحات الدائرية فإن ($\varepsilon = 0.64$).

نمرر مستوي مقارنة $(0-0)$ خلال مركز ثقل الفتحة ونكتب معادلة برنولي للمقطع (I-I) –السطح الحر للسائل في الخزان– و(II-II) –المقطع المضغوط–:

$$\frac{\alpha v_1^2}{2g}+\frac{p_1}{\rho\cdot g}+Z_1=\frac{\alpha v_2^2}{2g}+\frac{p_2}{\rho\cdot g}+Z_2+h_f$$

وبمراعاة أن السائل غير قابل للانضغاط $(\rho=const)$ وأن المستوي الحر للسائل ثابت ومعرض للضغط الجوي وتفريغ السائل يتم إلى الجو الخارجي (حيث يوجد الضغط الجوي) وبإهمال الاحتكاك يكون:

$$v_1=0\ ;\ p_1=p_a\ ;\ p_2=p_a\ ;h_f=0\ ;\ \alpha=1$$

وتنتهي معادلة برنولي إلى الشكل التالي:

$$\frac{p_a}{\rho\cdot g}+H=\frac{v_2^2}{2g}+\frac{p_a}{\rho\cdot g}+0$$

ونحصل على السرعة المثالية للتفريغ من العلاقة التالية:

$$v_2=\sqrt{2g\cdot H} \qquad (3.75)$$

هذه العلاقة معروفة باسم قانون تورشيلي للتفريغ. وكما هو ملاحظ فإن سرعة التفريغ المثالية لسائل يخضع لتأثير الثقالة تتعلق فقط بالارتفاع الشاقولي (H) بين محور الفتحة والمستوى الحر للسائل في الخزان وتساوي السرعة النهائية التي يبلغها جسم صلب يسقط سقوطاً حراً في الخلاء من ارتفاع (H) وبدون سرعة ابتدائية.

ومن الجدير بالذكر أن هذه النتيجة تبقى صحيحة حتى ولو اتصلت فتحة التفريغ بأنبوب طويل ثابت أو متغير المقطع. كما تبقى صحيحة حتى ولو لم يثبت مستوى السائل في الخزان شرط أن يكون مقطع الخزان أكبر بكثير من مقطع الفتحة حيث تكون سرعة هبوط السائل في الخزان صغيرة جداً مما يسمح بإهمالها. ويكون التدفق من الفتحة (ω_C):

$$Q=\omega_C\cdot v_2$$

وقد دلت التجارب أن الغزارة الفعلية (Q^*) أقل من الغزارة المثالية (Q) وذلك بسب عدم انتظام حواف الفتحة من جهة وبسبب قوى الاحتكاك على جدران الخزان الداخلية ولذلك يتم إدخال معامل تصحيح (φ) حيث تصبح المعادلة السابقة:

$$Q^* = \varphi \cdot \omega_C \cdot v_2$$

وبالتعويض عن قيمة (ω_C) في العلاقة السابقة، ينتج:

$$Q^* = \varphi \cdot \varepsilon \cdot \omega \cdot v_2$$

$$Q^* = \mu \cdot \omega \sqrt{2g \cdot H} \qquad (3.76)$$

حيث إنَّ:

$\mu = \varepsilon \cdot \varphi$: معامل التصريف.

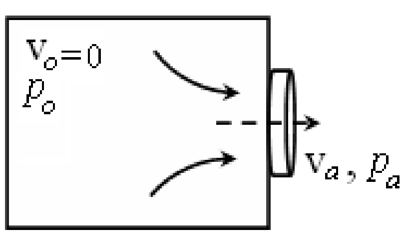
ω : مساحة الفتحة في الجدار.

φ : معامل تصحيح السرعة وقيمتها المتوسطة (0.97). وبناء على ماسبق فإن القيمة المتوسطة لمعامل التصريف:

$$\mu = \varepsilon \cdot \varphi = 0.64 \times 0.97 = 0.62$$

3.12.3- تفريغ خزان من فتحة جانبية صغيرة تحت تأثير ضغط زائد:

ليكن الخزان المبين في الشكل (2.27) حيث يؤثر الضغط الزائد (p_o) على سائل كثافته (ρ) والذي يتدفق من فتحة جانبية بسرعة (v_a) في الهواء الخارجي حيث يسود الضغط الجوي (p_a).



الشكل (2.27)، تفريغ خزان من فتحة جانبية تحت تأثير ضغط زائد.

نطبق معادلة برنولي للارتفاعات على نقطتين من خط تيار أفقي يمر من مركز ثقل فتحة التفريغ، فإذا لاحظنا أن السرعة داخل الخزان معدومة تقريباً $(v_o = 0)$ ولايوجد فرق ارتفاع مكاني، نجد بسهولة أن سرعة التفريغ تعطى بالمعادلة:

$$\frac{(p_o + p_a)}{\rho \cdot g} = \frac{v_a^2}{2g} + \frac{p_a}{\rho \cdot g}$$

ومنه ينتج:

$$v_a = \sqrt{\frac{2p_o}{\rho}} = \sqrt{2g \cdot h_p} \tag{3.77}$$

وتستخدم هذه العلاقة من أجل السوائل غير القابلة للانضغاط، حيث يمثل (h_p) ارتفاع الضغط (الضخ) الزائد.